

Incertezza nella misura del campo magnetico a bassa frequenza — Valutazione della perturbazione dovuta all'operatore e al soggetto esposto

Daniele Andreuccetti, CNR-IFAC, Firenze

Le normative che regolamentano l'esposizione umana ai campi elettromagnetici richiedono che i livelli di esposizione da confrontare con i valori limite siano determinati in condizioni "imperturbate", il che significa:

- avendo rimosso dal teatro espositivo il soggetto esposto la cui esposizione si vuole quantificare;
- avendo eliminato o il più possibile ridotto la perturbazione dovuta all'eventuale presenza dell'operatore che esegue la misura.

La seconda di queste condizioni può essere realizzata abbastanza agevolmente allontanando l'operatore dalla sorgente e dallo strumento di misura per mezzo di cavalletti (isolanti) e dispositivi di controllo remoto.

La prima condizione può essere invece assai difficile da mettere in pratica, specie nei casi come la saldatura industriale ad arco o l'uso di elettrobisturi, in cui l'attivazione della sorgente è strettamente legata alla presenza dell'operatore che la utilizza e addirittura la tiene in mano. Nel primo di questi casi (la saldatura ad arco) si fa però spesso osservare che la sorgente emette principalmente un campo magnetico di frequenza (relativamente) bassa, che non viene influenzato dalla presenza dell'operatore addetto alla saldatura.

È risaputo, infatti, che il campo magnetico a bassa frequenza non interagisce in modo significativo con gli oggetti conduttori esposti (purché non ferromagnetici) e quindi è poco o per niente perturbato dalla loro presenza sul teatro espositivo. Tra questi oggetti rientrano anche gli organismi umani e quindi i corpi dell'operatore che esegue la misura e del soggetto esposto.

A rigore, però, ogni campo magnetico variabile nel tempo induce correnti elettriche negli oggetti conduttori esposti ed è quindi in qualche misura perturbato dal campo magnetico generato da quelle stesse correnti. La perturbazione è riconducibile all'induzione elettromagnetica governata dalla legge di Faraday, pertanto la sua rilevanza è proporzionale alla frequenza del campo, alla conducibilità (media) dell'oggetto esposto e all'area della sezione di quest'ultimo ortogonale alla direzione del campo. In questa nota tecnica si vuole stimare in quali condizioni (e in particolare fino a quale valore di frequenza) questa perturbazione è trascurabile entro un prefissato livello di accuratezza.

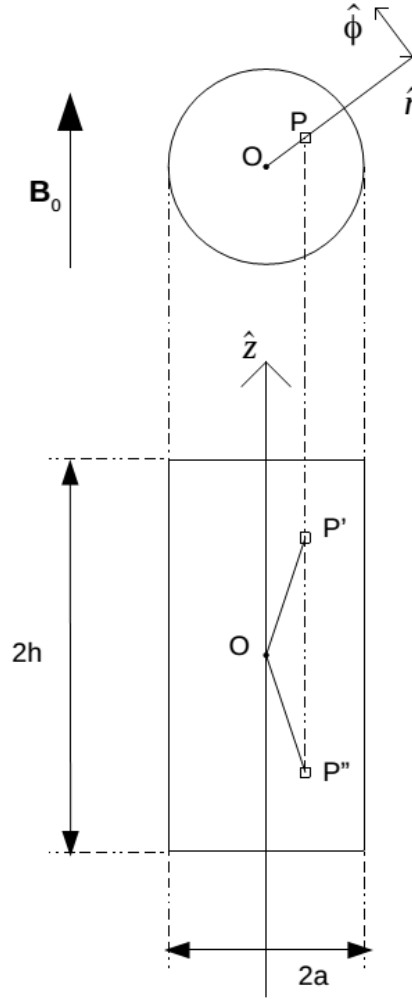


Figura 1. Modello dell'oggetto esposto: un cilindro di diametro $2a$ e altezza $2h$, con l'asse parallelo al campo magnetico primario B_0 . P' e P'' sono due volumetti in posizione simmetrica rispetto al piano mediano.

Per individuare queste condizioni, prendiamo in considerazione un caso particolare che, sebbene estremamente semplice e schematico, è ugualmente in grado di fornire indicazioni utili. Con riferimento alla Figura 1, modelliamo l'oggetto esposto mediante un cilindro costituito da materiale omogeneo di conducibilità elettrica σ , avente diametro $2a$, altezza $2h$ e asse longitudinale parallelo alla direzione del campo magnetico "primario" di induzione B_0 . Indichiamo con f la frequenza del campo e facciamo riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z) con asse z coincidente con la direzione del campo primario ed origine nel centro geometrico O del cilindro. In questa configurazione, è nota dalla teoria l'espressione della densità di corrente $J(P)$ indotta in un generico punto $P(r, \phi, z)$ dell'oggetto:

$$J(P) = -j\sigma f \pi r B_0 \phi \quad (\text{diretta secondo il versore azimutale}) \quad (\text{Eq. 1})$$

Partendo da questa espressione è possibile calcolare (per mezzo della prima formula di Laplace) il contributo $dB'_1(O)$ al campo secondario nel centro O (scelto, per semplicità, come punto di calcolo) dovuto alla densità di corrente $J(P')$ presente nel volumetto dV contiguo al generico punto P' del cilindro e quello $dB''_1(O)$ dovuto alla densità di corrente $J(P'')$ presente nel punto P'' , posto in posizione simmetrica di P' rispetto al piano mediano del cilindro. Si trova:

$$\begin{aligned} dB'_1(O) &= \mu_0 \frac{J(P') dV \times (O - P')}{4\pi |O - P'|^3} \\ dB''_1(O) &= \mu_0 \frac{J(P'') dV \times (O - P'')}{4\pi |O - P''|^3} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2})$$

Se in queste utilizziamo l'espressione dell'Eq. 1 per la densità di corrente J , esplicitiamo le coordinate dei vettori nel sistema cilindrico scelto ed eseguiamo la somma dei due contributi in posizione simmetrica, otteniamo come risultato un vettore dB_1 allineato con l'asse z del cilindro (e quindi con il campo magnetico primario B_0) il cui modulo vale:

$$dB_1(O) = \frac{\mu_0 \sigma f B_0 r^3}{2\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} dr d\varphi dz \quad (\text{Eq. 3})$$

Integrando infine questa espressione su tutto il volume del cilindro, si arriva a determinare l'espressione $B_1(O)$ del modulo dell'induzione magnetica prodotta dalle correnti indotte:

$$B_1(O) = \mu_0 \sigma f \pi B_0 h \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right) \quad (\text{Eq. 4})$$

Un'espressione più maneggevole, ma ugualmente adatta al nostro scopo, può essere ottenuta considerando il cilindro infinitamente lungo, ovvero passando al limite per $h \rightarrow \infty$ (cfr. Appendice); si trova:

$$B_1(O) = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma f \pi B_0 a^2 \quad (\text{Eq. 5})$$

Da questa espressione è infine possibile dedurre la condizione che deve essere verificata dai parametri del problema (frequenza f , raggio a del cilindro esposto e conducibilità σ del materiale di cui è costituito) se si vuole che il rapporto B_1/B_0 (che quantifica l'entità della perturbazione del campo magnetico da parte delle correnti indotte) sia inferiore ad un limite prefissato ε . L'espressione risultante è la seguente:

$$\sigma f a^2 < \frac{2\varepsilon}{\pi \mu_0} \quad (\text{Eq. 6})$$

L'aver fatto riferimento, per semplicità di calcolo, al centro geometrico O dell'oggetto conduttore esposto non costituisce una limitazione eccessiva, perché nel punto O il contributo del campo prodotto dalle correnti indotte è massimo e quindi la valutazione eseguita è utile a stimare il valore massimo atteso della perturbazione al campo primario causata dall'oggetto esposto.

Per fare un esempio, se – pensando ad un individuo esposto – prendiamo i valori di $\sigma \approx 0,3 \text{ S/m}$ (valore tipico del tessuto muscolare umano a bassa frequenza) ed $a \approx 30 \text{ cm}$, la perturbazione al campo magnetico risulta minore dell'1% per tutte le frequenze fino a oltre 180 kHz ed è minore di 3 ppm a 50 Hz.

Un'analisi un po' più articolata è fornita dal grafico di Figura 2. In esso sono riportate varie curve, corrispondenti a diversi valori del parametro a (il raggio del cilindro che rappresenta la dimensione del soggetto esposto sul piano ortogonale alla direzione del campo magnetico primario). Ciascuna curva indica, in funzione della frequenza, l'entità massima della perturbazione del campo primario dovuta alle correnti indotte nell'oggetto esposto. Per costruire le curve, si sono utilizzati i valori di conducibilità in funzione della frequenza corrispondenti al tessuto muscolare umano e determinati col modello parametrico di C. Gabriel [1].

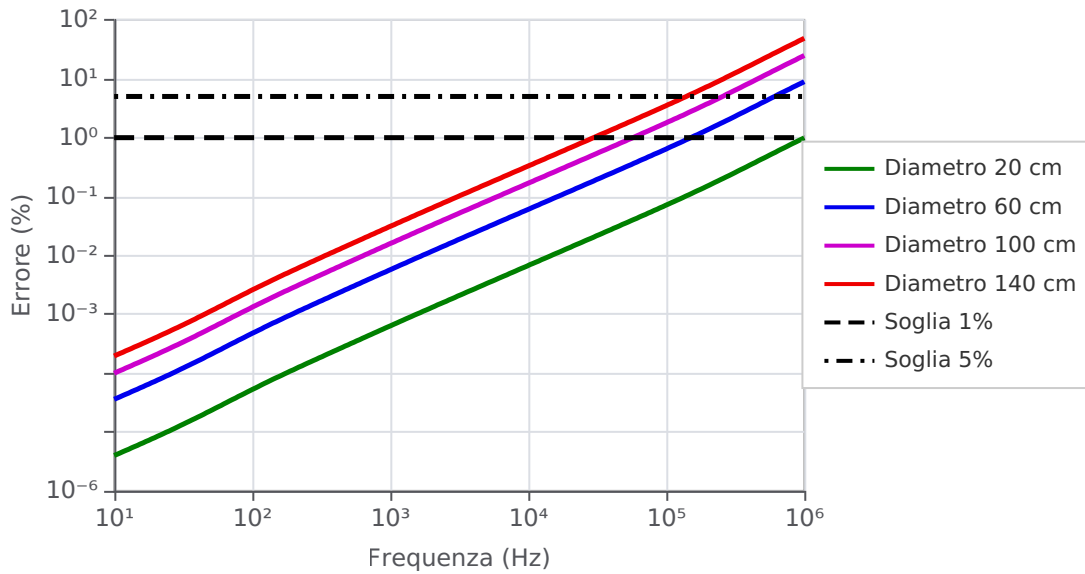


Figura 2. Entità massima della perturbazione del campo magnetico primario dovuta alle correnti indotte nell'oggetto esposto, in funzione della frequenza, per sei valori del diametro del cilindro equivalente. Conducibilità del tessuto muscolare secondo il modello parametrico di C. Gabriel.

Appendice

L'Eq. 5 si ricava dall'Eq. 4 per mezzo della seguente operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right) = \frac{a^2}{2}$$

Per dimostrare la validità di questa espressione, si consideri che risulta:

$$\begin{aligned}
h \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right) &= h^2 \left(\sqrt{\frac{a^2 + h^2}{h^2}} - 1 \right) = h^2 \left(\sqrt{\frac{a^2}{h^2} + 1} - 1 \right) \\
&= h^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right)^{0.5} - 1 \right] \approx h^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{2h^2} \right) - 1 \right] = \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Dove si è usata la relazione asintotica [2]:

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x \quad \text{se } x \ll 1$$

valida nel caso in esame (in cui $x = a^2/h^2$) se $a \ll h$, una condizione sicuramente rispettata quando $h \rightarrow \infty$.

Bibliografia

- [1] D. Andreuccetti, R. Fossi and C. Petrucci: "An Internet resource for the calculation of the dielectric properties of body tissues in the frequency range 10 Hz - 100 GHz". CNR-IFAC, Florence (Italy), 1997. Based on data published by C. Gabriel et al. in 1996. [Online]. Available: <http://niremf.ifac.cnr.it/tissprop/>
- [2] H.B. Dwight: "Tables of integrals and other mathematical data", 4^a edizione, The Macmillan Company 1961. Eq. (1) pag. 1 e eq. (5.3) pag. 2.