

# **Incertezza nella misura del campo magnetico a bassa frequenza — Valutazione di massima dell'errore dovuto alle dimensioni finite del sensore in un campo disomogeneo**

---

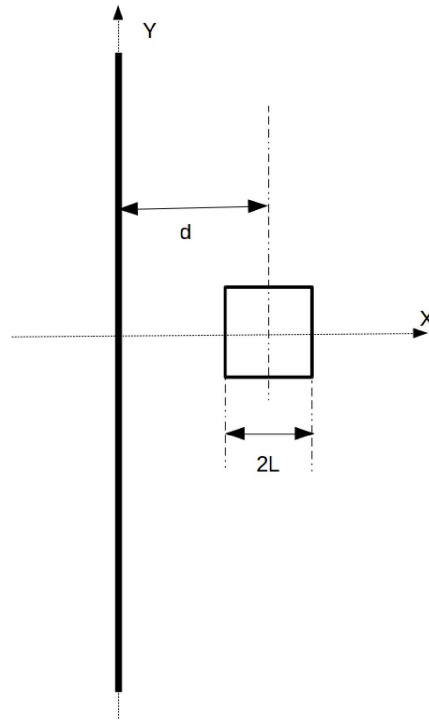
Daniele Andreuccetti, CNR-IFAC, Firenze

Vi sono, com'è noto, limitazioni alla possibilità di effettuare misure accurate di campi elettrici, magnetici ed elettromagnetici in punti posti molto vicino alla sorgente. Queste limitazioni, che spesso si traducono in una maggiore incertezza di misura, dipendono da vari fattori, tra cui:

- le dimensioni del sensore (intendendo, con questo termine, la parte sensibile della sonda di misura), poiché non è materialmente possibile avvicinare oltre un certo limite il centro elettrico del sensore alle strutture della sorgente;
- la possibilità che l'accoppiamento diretto tra sensore e sorgente alteri la distribuzione di cariche e/o correnti sulle strutture di quest'ultima, modificandone le caratteristiche di emissione;
- la rapidità di variazione dell'intensità del campo in funzione della distanza dalla sorgente, a causa della quale il campo può risultare notevolmente disomogeneo nella porzione di spazio occupata dal sensore.

In questa nota tecnica si vuole analizzare l'ultimo dei fattori appena elencati, ovvero indagare l'errore di misura dovuto alle dimensioni del sensore, quando questo sia immerso in un campo fortemente disomogeneo. Si considererà, in particolare, la misura del campo magnetico in condizioni quasistatiche, facendo riferimento al seguente scenario (vedere anche la Figura 1), sufficientemente semplice da poter essere trattato analiticamente:

- una sorgente di campo magnetico a simmetria cilindrica in regime quasistatico sinusoidale, rappresentata geometricamente da un conduttore rettilineo indefinito;
- un sensore a spira singola di forma quadrata di lato  $2L$ , giacente su un piano contenente anche il conduttore sorgente e allineato con due lati paralleli ad esso; il centro della spira si trova ad una distanza  $d$  dal conduttore stesso.



**Figura 1.** Scenario di misura: un conduttore sorgente rettilineo indefinito lungo l'asse Y e un sensore a spira quadrata di lato  $2L$ , il cui centro si trova a distanza  $d$  dal conduttore, sullo stesso piano.

Questo scenario – per quanto estremamente semplificato – può fornire informazioni interessanti sull'errore cercato (quanto meno ai fini della formulazione di una raccomandazione di massima), anche perché è possibile sostenere che alcune delle semplificazioni presenti nel modello (forma quadrata del sensore e disposizione allineata con la sorgente) vanno nella direzione di fornire una stima approssimata per eccesso dell'errore stesso.

Per quanto riguarda l'andamento dell'intensità del campo in funzione della distanza dal conduttore sorgente, faremo riferimento a tre casi particolari.

**Caso 1 – Induzione magnetica che si attenua come  $1/r$  allontanandosi dal conduttore sorgente.** Il primo caso corrisponde al campo di Biot-Savart ed è l'unico a rigore fisicamente possibile se si ha a che fare con un conduttore rettilineo indefinito monopolare; d'altra parte, questo caso da solo non è sufficiente ad esaurire l'argomento, perché nelle situazioni reali si ha quasi sempre a che fare con campi che decadono più rapidamente e quindi danno luogo ad un errore maggiore di quello stimabile nell'ipotesi dell'andamento  $1/r$ .

**Caso 2 – Induzione magnetica che si attenua come  $1/r^2$  allontanandosi dal conduttore sorgente.** Nel secondo caso supporremo di aver a che fare con un campo che si attenua in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza allontanandosi dal conduttore sorgente, pur mantenendo la simmetria cilindrica. In realtà, non può esistere una sorgente che si comporta esattamente in questo modo; il caso reale che più si avvicina a questa situazione è

quello di un doppino bifilare rettilineo indefinito il cui campo magnetico – sebbene non presenti una simmetria cilindrica – si attenua appunto come  $1/r^2$ , almeno a partire da una distanza sufficientemente grande rispetto all'interdistanza tra la coppia di conduttori.

**Caso 3 – Induzione magnetica che si attenua come  $1/r^3$  allontanandosi dal conduttore sorgente.** Nel terzo caso supporremo infine che il campo si attenui in modo inversamente proporzionale al cubo della distanza allontanandosi dal conduttore sorgente. Anche questa situazione non è fisicamente realizzabile con simmetria cilindrica, ma è utile a rappresentare il modo con cui il campo decade nei pressi di molte sorgenti reali (per esempio quelle confinate in una regione di spazio la cui estensione lineare massima sia piccola rispetto alla distanza a cui si valuta il campo).

In tutti e tre i casi, la grandezza che costituisce il risultato della misura è la differenza di potenziale (ddp) indotta nella spira, pari (in modulo) alla derivata del flusso di induzione magnetica  $\phi$  concatenato con la spira stessa.

Il valore “ideale”  $V_0$  di questa ddp corrisponde al campo di induzione magnetica nominale  $B_0$  al suo centro, pensato omogeneo su tutta la spira:

$$B_0 = \frac{k}{d^n} \quad (\text{Eq. 1})$$

con  $n = 1, 2, 3$  nei tre casi che abbiamo convenuto di studiare. La ddp  $V_0$  misurata in condizioni ideali vale quindi:

$$V_0 = \left| \frac{d\phi_0}{dt} \right| = (2\pi f) B_0 (2L)^2 = (2\pi f) \left( \frac{k}{d^n} \right) (4L^2) = \frac{8\pi f k L^2}{d^n} \quad (\text{Eq. 2})$$

Il valore “reale”  $V$  della ddp indotta si ottiene calcolando il flusso  $\phi$  come integrale dell'effettivo valore di campo  $B(x, y)$  sull'area della spira, ovvero – scegliendo come asse  $X$  la perpendicolare al conduttore sorgente giacente sul piano del sensore e passante per il centro di quest'ultimo:

$$B(x, y) = \frac{k}{x^n} \quad (\text{Eq. 3})$$

Quindi, con gli integrali estesi all'area della spira:

$$V = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = 2\pi f \iint_{\text{spira}} B(x, y) dx dy = 2\pi f \iint_{\text{spira}} \frac{k}{x^n} dx dy = 2\pi f k \iint_{\text{spira}} \frac{dx dy}{x^n} \quad (\text{Eq. 4})$$

ovvero:

$$V = 2\pi f k \int_{-L}^{+L} dy \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x^n} = 4\pi f k L \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x^n} \quad (\text{Eq. 5})$$

Poniamo adesso:

$$\Gamma_n = \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x^n} \quad (\text{Eq. 6})$$

e calcoliamo l'espressione dell'errore relativo di misura  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{|V - V_0|}{V_0} = \left| \frac{V}{V_0} - 1 \right| = \left| \frac{4\pi f k L \Gamma_n}{\left( \frac{8\pi f k L^2}{d^n} \right)} - 1 \right| = \left| \frac{d^n}{2L} \Gamma_n - 1 \right| \quad (\text{Eq. 7})$$

## Caso 1 – Induzione magnetica che si attenua come 1/r

In questo caso, dall'Eq. 6 e dall'Eq. 7 con  $n = 1$  otteniamo:

$$\Gamma_1 = \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x} = \ln \frac{d+L}{d-L} \quad (\text{Eq. 8})$$

e quindi:

$$\varepsilon = \left| \frac{d}{2L} \Gamma_1 - 1 \right| = \left| \frac{d}{2L} \ln \frac{d+L}{d-L} - 1 \right| \quad (\text{Eq. 9})$$

posto  $\rho = d/L$  si può scrivere:

$$\varepsilon = \left| \frac{\rho}{2} \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} - 1 \right| \quad (\text{Eq. 10})$$

Immaginiamo per esempio di avere a che fare con un sensore di circa 100 cm<sup>2</sup> di superficie, per il quale quindi  $2L = 10 \div 12$  cm. Avremo il seguente andamento dell'errore in funzione della distanza  $d$  del centro dal conduttore sorgente:

**Tabella 1.** *Errore relativo di misura nel caso 1 (attenuazione 1/r).*

| <b>d (cm)</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 5 cm</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 5,5 cm</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 6 cm</b> |
|---------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 5,1           | 135%                                         | N/A                                            | N/A                                          |
| 5,6           | 61%                                          | 140%                                           | N/A                                          |
| 6,1           | 41%                                          | 64%                                            | 144%                                         |
| 7             | 25%                                          | 35%                                            | 50%                                          |
| 8             | 17%                                          | 23%                                            | 30%                                          |
| 9             | 13%                                          | 16%                                            | 21%                                          |
| 10            | 9,9%                                         | 12%                                            | 16%                                          |
| 12            | 6,5%                                         | 8,0%                                           | 9,9%                                         |
| 14            | 4,6%                                         | 5,7%                                           | 6,9%                                         |
| 16            | 3,5%                                         | 4,2%                                           | 5,1%                                         |
| 18            | 2,7%                                         | 3,3%                                           | 4,0%                                         |
| 20            | 2,2%                                         | 2,6%                                           | 3,2%                                         |

Da questa tabella si vede come per limitare l'errore entro il 10% occorre che il centro del sensore si trovi ad almeno 10 ÷ 12 cm dal conduttore sorgente (una distanza paragonabile al lato del sensore stesso).

## Caso 2 – Induzione magnetica che si attenua come $1/r^2$ ( $n = 2$ )

In questo caso, dall'Eq. 6 e dall'Eq. 7 con  $n = 2$  otteniamo:

$$\Gamma_2 = \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{d-L}^{d+L} \frac{2L}{d^2 - L^2} \quad (\text{Eq. 11})$$

e quindi:

$$\varepsilon = \left| \frac{d^2}{2L} \Gamma_2 - 1 \right| = \left| \frac{d^2}{d^2 - L^2} - 1 \right| = \left| \frac{L^2}{d^2 - L^2} \right| \quad (\text{Eq. 12})$$

posto  $\rho = d/L$  si può scrivere:

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{\rho^2 - 1} \right| \quad (\text{Eq. 13})$$

Con la stessa ipotesi precedente riguardo alle dimensioni del sensore, avremo il seguente andamento dell'errore in funzione della distanza  $d$  del centro dal conduttore sorgente:

**Tabella 2.** Errore relativo di misura nel caso 2 (attenuazione  $1/r^2$ ).

| <b>d (cm)</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 5 cm</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 5,5 cm</b> | <b><math>\varepsilon</math> per L = 6 cm</b> |
|---------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 5,1           | 2475%                                        | N/A                                            | N/A                                          |
| 5,6           | 393%                                         | 2725%                                          | N/A                                          |
| 6,1           | 205%                                         | 435%                                           | 2975%                                        |
| 7             | 104%                                         | 161%                                           | 277%                                         |
| 8             | 64%                                          | 90%                                            | 129%                                         |
| 9             | 45%                                          | 60%                                            | 80%                                          |
| 10            | 33%                                          | 43%                                            | 56%                                          |
| 12            | 21%                                          | 27%                                            | 33%                                          |
| 14            | 15%                                          | 18%                                            | 22%                                          |
| 16            | 11%                                          | 13%                                            | 16%                                          |
| 18            | 8,4%                                         | 10%                                            | 12%                                          |
| 20            | 6,7%                                         | 8,2%                                           | 9,9%                                         |

Gli errori, come si vede, sono un po' maggiori rispetto al caso precedente: per restare sotto al 10% occorrerebbe porre il centro elettrico del sensore ad almeno 18 ÷ 20 cm dal conduttore sorgente (una distanza pari a circa una volta e mezzo il lato del sensore stesso).

### Caso 3 – Induzione magnetica che si attenua come $1/r^3$ ( $n = 3$ )

In questo caso, dall'Eq. 6 e dall'Eq. 7 con  $n = 3$  otteniamo:

$$\Gamma_3 = \int_{d-L}^{d+L} \frac{dx}{x^3} = \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_{d-L}^{d+L} \frac{2dL}{(d+L)^2 (d-L)^2} \quad (\text{Eq. 14})$$

E quindi:

$$\varepsilon = \left| \frac{d^3}{2L} \Gamma_3 - 1 \right| = \left| \frac{d^4}{(d+L)^2 (d-L)^2} - 1 \right| \quad (\text{Eq. 15})$$

posto  $\rho = d/L$  si può scrivere:

$$\varepsilon = \left| \frac{\rho^4}{(\rho+1)^2 (\rho-1)^2} - 1 \right| = \left| \frac{\rho^4}{(\rho^2-1)^2} - 1 \right| = \left| \frac{2\rho^2-1}{(\rho^2-1)^2} \right| \quad (\text{Eq. 16})$$

Con la stessa ipotesi precedente riguardo alle dimensioni del sensore, avremo il seguente andamento dell'errore in funzione della distanza  $d$  del centro dal conduttore sorgente:

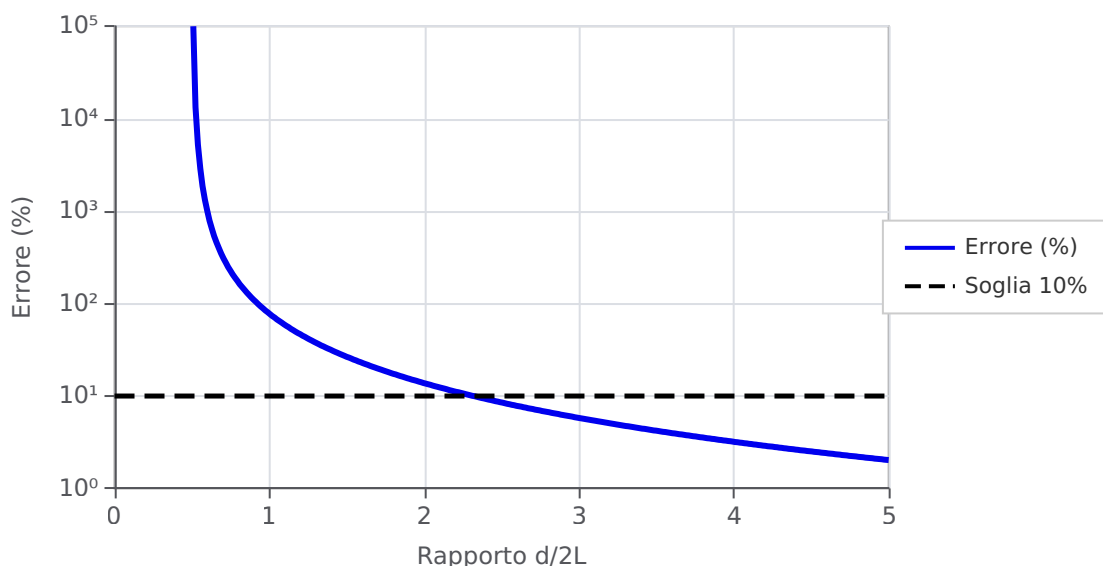
Tabella 3. Errore relativo di misura nel caso 3 (attenuazione  $1/r^3$ ).

| d (cm) | $\varepsilon$ per L = 5 cm | $\varepsilon$ per L = 5,5 cm | $\varepsilon$ per L = 6 cm |
|--------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 5,1    | 66219%                     | N/A                          | N/A                        |
| 5,6    | 2331%                      | 79719%                       | N/A                        |
| 6,1    | 829%                       | 2758%                        | 94469%                     |
| 7      | 317%                       | 583%                         | 1321%                      |
| 8      | 169%                       | 260%                         | 422%                       |
| 9      | 109%                       | 155%                         | 224%                       |
| 10     | 78%                        | 106%                         | 144%                       |
| 12     | 46%                        | 60%                          | 78%                        |
| 14     | 31%                        | 40%                          | 50%                        |
| 16     | 23%                        | 29%                          | 35%                        |
| 18     | 17%                        | 22%                          | 27%                        |
| 20     | 14%                        | 17%                          | 21%                        |
| 22     | 11%                        | 14%                          | 17%                        |
| 24     | 9,3%                       | 11%                          | 14%                        |
| 26     | 7,8%                       | 9,6%                         | 12%                        |
| 28     | 6,7%                       | 8,2%                         | 9,9%                       |
| 30     | 5,8%                       | 7,1%                         | 8,5%                       |

In questo caso quindi, per restare sotto al 10%, occorrerebbe porre il centro elettrico del sensore ad almeno  $24 \div 28$  cm dal conduttore sorgente.

Le conclusioni a cui siamo giunti nei tre casi resterebbero valide anche se si considerasse un sensore a spira circolare anziché quadrata; in questo caso, infatti, ci possiamo aspettare un errore minore rispetto al caso della spira quadrata, perché le aree della spira esposte a un valore di campo diverso dal valore nominale  $B_0$  hanno un'estensione più piccola.

Le stesse conclusioni resterebbero valide anche se il sensore non giacesse su un piano contenente il conduttore sorgente; in questo caso, infatti, l'escursione massima dell'intensità del campo da un punto all'altro del sensore sarebbe minore rispetto al caso considerato (cioè il sensore sarebbe esposto ad un campo meno disomogeneo).



**Figura 2.** *Errore relativo di misura nel caso 3 (attenuazione  $1/r^3$ ), in funzione della distanza  $d$  del centro del sensore dal conduttore sorgente, normalizzata al lato  $2L$  del sensore stesso.*

Il caso più interessante da un punto di vista pratico è probabilmente il terzo, perché adatto a rappresentare molte situazioni reali e quindi a dare supporto a una raccomandazione operativa di massima. Ad esso si riferisce la Figura 2, nella quale l'errore stimato viene riportato in funzione della distanza  $d$  del centro del sensore dal conduttore sorgente, normalizzata alla lunghezza  $2L$  del lato del sensore stesso. Come si vede, l'indicazione di massima che si può dare, per contenere l'errore entro il 10%, è quella di mantenere il centro del sensore ad una distanza dalla sorgente pari ad almeno due volte e mezzo la sua massima dimensione lineare.